数　学

1 以下の〔1〕～〔4〕の $\boxed{①}$ ～ $\boxed{④}$ に適切な値を答えなさい．

ただし，eは自然対数の底とする．

〔1〕 $A=e^2$とするとき，

$$8\left(1+\cos^3\frac{\pi}{18}\right)\log_A e-\frac{3}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{18}\right)\log_e A=\boxed{①}$$ である．

〔2〕 bを正の定数，xを正の実数とする．方程式$\log_e x=bx$が異なる2つの実数解をもつのは　$0<b<\boxed{②}$ のときである．

〔3〕 数列$\{c_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$を，初項1，公差2の等差数列とする．数列$\{c_n\}$の初項から第n項までの和S_nに対して$T_n=\log_e S_n$，$U_n=e^{T_n}$と定義する．数列$\{U_n\}$の初項から第24項までの和の値は $\boxed{③}$ となる．

〔4〕 定積分$\displaystyle\int_0^D\frac{2e^x}{2e^x+3}\,dx$の値は $\boxed{④}$ である．ただし，$D=\log_e 3$とする．

2 xy平面上に2点$\mathrm{P}_1(1,1)$，$\mathrm{P}_2(1,2)$があり，以下の条件(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)をすべて満たすように$\mathrm{P}_3(x_3,\ y_3)$，$\mathrm{P}_4(x_4,\ y_4)$，$\mathrm{P}_5(x_5,\ y_5)$，$\cdots$を定めるものとする．

(Ⅰ) $\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}\right|=\dfrac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}\right|$　$(n=3,4,5,\cdots)$

(Ⅱ) $\angle\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\dfrac{\pi}{4}$　$(n=3,4,5,\cdots)$

(Ⅲ) $x_n\geqq x_{n-1}$　$(n=3,4,5,\cdots)$

このとき，以下の問いに答えなさい．

〔1〕 ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}$を成分で表しなさい．

〔2〕 ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k-1}\mathrm{P}_{2k}}$ $(k=1,2,3,\cdots)$の成分をkを用いた式で表しなさい．

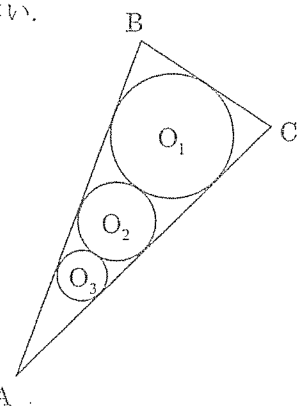
〔3〕 ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ $(k=1,2,3,\cdots)$の成分をkを用いた式で表しなさい．

〔4〕 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=X$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=Y$とおく．このとき$n$を限りなく大きくすると，点$\mathrm{P}_n$は点$\mathrm{P}(X,Y)$に限りなく近づいていく．$X,Y$を求めなさい．

$\boxed{3}$ 三角形ABCはAB=AC，∠BAC=2θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$を満たすものとする．

三角形ABCの内接円をO_1とし，その半径をaとする．また，円O_n $(n=1,2,3,\cdots)$より半径が短く，辺AB，辺AC，円O_nに接する円をO_{n+1}とする．このとき，以下の問いに答えなさい．ただし，円周率はπを用いるものとする．

〔1〕 三角形ABCの周の長さLをaとθを用いて表しなさい．
ただし，$L=\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}$ である．



〔2〕 円O_nの周の長さをW_nで表すとき，

$$W=\sum_{n=1}^{\infty}W_n$$

をaとθを用いて表しなさい．

〔3〕 $L=W$が成り立つとき，$\sin\theta$, $\cos\theta$の値をそれぞれ求めなさい．

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えなさい．

〔1〕次の定積分を求めなさい．ただし，aは正の定数とする．

1） $\displaystyle\int_0^a te^{-t}dt$　　　　2） $\displaystyle\int_0^a t^2e^{-t}dt$

〔2〕以下の空欄 $\boxed{①}$ ～ $\boxed{⑤}$ に適切な値を答えなさい．

$x\geqq 0$で定義された関数$f(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)e^{-\sqrt{x}}$に対して，$y=f(x)$の表す曲線を$C$とおく．$C$は$x=\boxed{①}$ で極大値 $\boxed{②}$ をとる．C上の点$(t,\ f(t))$での接線が原点を通るのは $t=\boxed{③}$ のときである．このときの接線をℓとおくと，ℓの傾きは $\boxed{④}$ となる．また，C，ℓとy軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{⑤}$ である．