

## 物 理 (その 1)

## 第 1 問

ピストンがついたシリンダーの端に 2 つの弁 A と B があり、弁 A を介して容積  $V$  の容器とつながっている(図 1)。また、弁 B を開くとシリンダー内 の圧力が大気圧  $P_0$  と等しくなる。シリンダーの端からピストンまでの距離を  $x$  とし、 $x=0$  のときシリンダー内の容積がゼロになるとす。また、シリンダーの断面積を  $S$  とし、全体は一定の温度に保たれているものとする。

はじめに、シリンダー内と容器内の圧力を大気圧  $P_0$  と等しくして、弁 A と弁 B を閉じる(図 1)。以降、ピストンを往復させて、この往復の折り返し時点で弁を開閉しながら、次の(ステップ 1)から(ステップ 4)よりなる一連の操作を順に繰り返す場合を考える(図 2)。

(ステップ 1) 弁 A を閉じたまま、弁 B を開いて、ピストンを  $x=d$  まで押し込む。(ただし  $0 \leq d < L$  である。)

(ステップ 2) ピストンを  $x=d$  で止めて、弁 B を閉じる。  
(弁 A と弁 B を閉じた状態。)

(ステップ 3) 弁 A だけ開いて、ピストンを  $x=L$  まで引いて止める。

(ステップ 4) ピストンを  $x=L$  で止めたまま、弁 A を閉じる。  
(弁 A と弁 B を閉じた状態。)

まず、 $d=0$  の場合を考える。

問 1 最初の状態(図 1)から、上記の一連の操作を 1 回行った後の容器内の圧力はいくらになるか。

問 2 最初の状態(図 1)から、上記の一連の操作を  $k$  回繰り返した後の容器内の圧力はいくらか。

問 3 例えれば、 $V=100LS$  のとき、容器内の圧力がはじめて  $0.9P_0$  未満になるのは一連の操作を何回繰り返した後か、整数値で答えよ。必要であれば近似式  $(1+\alpha)^m \approx 1+m\alpha$  ( $|\alpha| \ll 1$ ) を用いてよい。

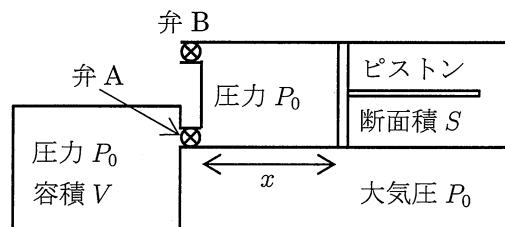
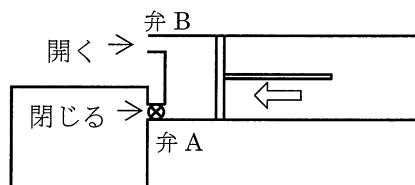


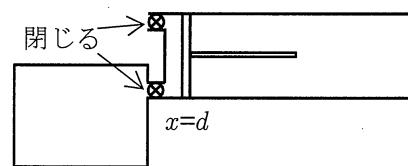
図 1：最初の状態

図 2：操作中の弁の開閉の様子

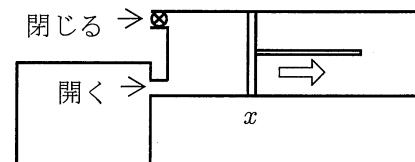
ピストンを押し込むとき



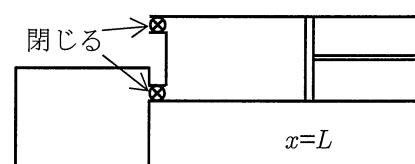
ピストンを  $x=d$  で止めたとき



ピストンを引くとき



ピストンを  $x=L$  で止めたとき



## 物 理 (その 2)

次に、少し現実に近い状況を考えてみよう。現実には、ピストンを押し込んでシリンダー内の容積を完全にゼロにすることは困難であり、多少はシリンダー内の容積が残る。この事は、本問において、 $x=0$ までピストンを押し込むのは困難であり、 $x=d$  ( $0 < d < L$ )までしか押し込められないことに対応する。そこで、上記の**(ステップ1)と(ステップ2)**において、 $d > 0$ として以下の間に答えよ。

**問4** 最初の状態（図1）から、上記の一連の操作を1回行った後の容器内の圧力を  $P_0$ 、 $V$ 、 $L$ 、 $S$ 、 $d$  を用いて表せ。

**問5** 最初の状態（図1）から、上記の一連の操作を  $k$  回繰り返した後の容器内の圧力を  $P_k$  として、一連の操作をもう1回行った後の容器内の圧力  $P_{k+1}$  を  $P_k$ 、 $P_0$ 、 $V$ 、 $L$ 、 $S$ 、 $d$  を用いて表せ。

**問6**  $P_k$  を  $P_0$ 、 $V$ 、 $L$ 、 $S$ 、 $d$ 、 $k$  を用いて表せ。

## 物 理 (その 3)

## 第2問

表面が滑らかな半径  $R$  の半球状の物体に質量  $m$  の質点をのせる。物体の底面の中心  $O$  を通る鉛直線と物体表面との交点を点  $P$  とする。図 1 のように中心  $O$  と質点を結ぶ線が、直線  $OP$  となす角度を  $\theta$  と定め、時計回りを正とする ( $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ )。重力加速度の大きさを  $g$  として間に答えよ。答えには根号を残して良い。ただし、空気抵抗は無視でき、質点は紙面内のみを動くものとする。

- [A] 水平な床の上に物体を固定し、点  $P$  ( $\theta = 0$ ) に質点を置いて静かに手を放すと、質点は初速度 0 で滑り始め、物体表面の点  $A$  で物体から離れた。 $\angle POA = \theta_0$  ( $> 0$ ) とする。

問 1  $\cos \theta_0$  の値を求めよ。

問 2  $R$  と  $g$  を用いて点  $A$  での質点の速さを求めよ。

- [B] 次に、[A]で定めた  $\theta_0$ だけ水平面から傾いた、十分に長い斜面上に物体を固定し、点  $P$  ( $\theta = 0$ ) に質点をのせる(図 2)。質点は物体表面に沿って頂点から時計回りに初速度 0 で滑り始めたのちに物体を離れて、斜面上の点  $B$  で弾んだ。

問 3 質点が物体を離れてから点  $B$  に到達するまでの時間を求めよ。

問 4  $OB$  の長さを求め  $R$  を用いて表せ。

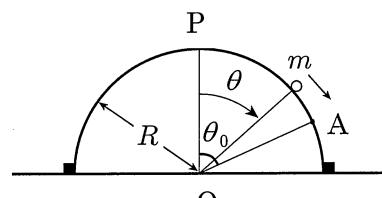


図 1

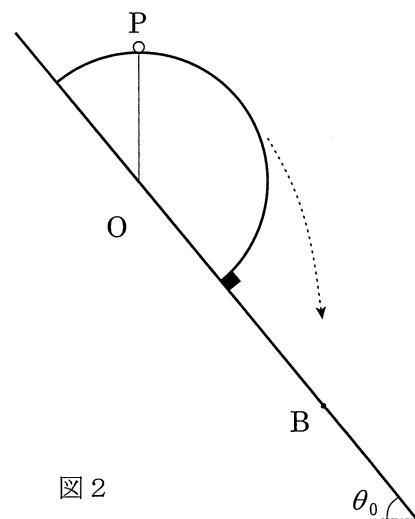


図 2

## 物 理 (その4)

## 第3問

[A] 自然長が等しく、バネ定数が各々  $k_1, k_2$  であるような 2 個のバネを用意する。

問1 図1a の様に、バネ定数が  $k_1, k_2$  の 2 個のバネを並列につなぎ、全体をバネの長さ方向に自然長から  $x$ だけ伸ばすとき、必要な力の大きさは  $k_1, k_2, x$  を用いて (ア) と表される。このことから、2 個のバネを並列につないだときの合成バネ定数は  $k_1, k_2$  を用いて (イ) と表されることが分かる。

一方、図1b の様に、バネ定数  $k_1, k_2$  の 2 個のバネを直列につなぎ、バネの長さ方向に力  $F$  を加えて全体を伸ばすとき、全体の自然な長さからの伸びは  $k_1, k_2, F$  を用いて (ウ) と表される。このことから、2 個のバネを直列につないだときの合成バネ定数は  $k_1, k_2$  を用いて (エ) と表されることが分かる。

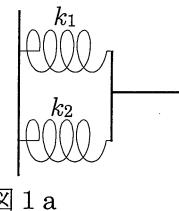


図1a

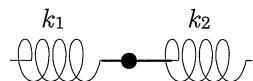


図1b

[B] 一邊の長さが  $L$  の正方形をした、質量と厚さを無視できる板を互いに平行に向い合わせて、自然長が  $a$  でバネ定数  $k$  のバネを多数使ってつなぐ場合を考える。以下では、バネの長さ方向は常に板面に対して垂直になっているものとする。

問2 一邊の長さが  $L$  の正方形の板面に、縦横等間隔にして  $N$  行  $N$  列にバネを並べて 2 枚の板をつなぐ(図2)。これによって、多数のバネが並列につながった状態になる。全体を一つのバネと考えたときの合成バネ定数を  $k, L, N, a$  のうち必要な文字を用いて表せ。ただし、すべてのバネはバネの長さ方向に平行にそろっているとする。

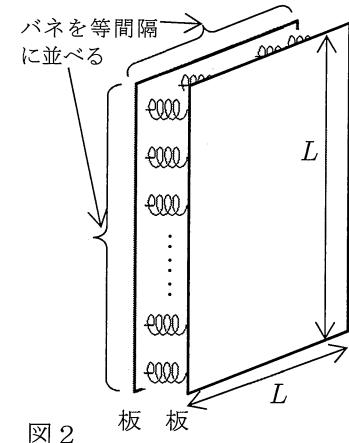
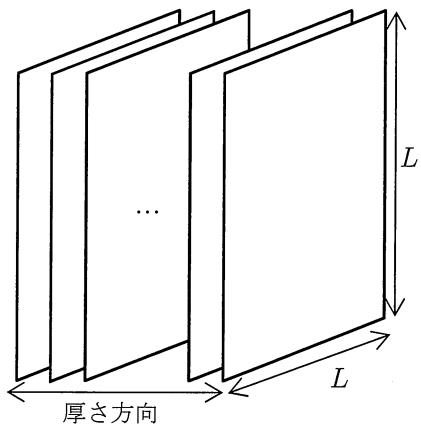


図2

問3 問2と同様の板を  $M+1$  枚平行に並べ(図3)、隣り合った板どうしを問2と同様に、等間隔に並べた  $N$  行  $N$  列のバネでつなぐ。これによって、 $N$  行  $N$  列のバネが  $M$  個直列につながった状態になる。このとき、全体を一つのバネと考えたときの合成バネ定数を  $k, L, N, M, a$  のうち必要な文字を用いて表せ。

図3 板を  $M+1$  枚平行に重ねてバネでつなぐ。

問4 この物体の単位体積当たりのバネの個数(バネの個数密度)を  $\rho$  とする。 $\rho$  を  $L, N, M, a$  のうち必要な文字を用いて表わせ。

問5 この物体の板に垂直な方向(バネの長さ方向)に力  $F$  を加えて押したところ、物体の厚さが  $h$ だけ縮んだ。今、係数  $E$  を次式で定義する。

$$\frac{F}{L^2} = E \frac{h}{aM}$$

このとき、 $E$  を  $\rho, k, a$  を用いて表せ。

## 物 理 (その 5)

## 第 4 問

コンデンサー、電源、スイッチ、およびダイオードで回路を作り、スイッチの切り替えを行う。ここで、ダイオードは図 1 に示した記号で表され、一方向にのみ電流を通し、逆方向には電流を通さないという性質をもつ。例えば図 2 の回路において、コンデンサー  $C_1$  に蓄えられている電荷がゼロの状態で、スイッチ S を A 側に入れると、ダイオードに電流が流れる向きに電圧がかかるのでコンデンサー  $C_1$  には電流が流れ込む。一方で、スイッチ S を B 側に入れると、ダイオードに電流が流れない向きに電圧がかかるので、コンデンサー  $C_1$  には電流が流れ込まない。

以下の問において、図 3 の回路を考える。コンデンサー  $C_1$  と  $C_2$  の電気容量を共に  $C$  とし、各々の電源の電圧を共に  $E$  とする。はじめ、各コンデンサーには電荷が蓄えられていないとして以下の間に答えよ。

最初にスイッチ S を A 側に入れて十分に時間が経過した後、

**問 1** コンデンサー  $C_1$  に蓄えられる電荷の大きさはいくらか。

引き続いで、スイッチ S を B 側に入れて十分に時間が経過した後、

**問 2** コンデンサー  $C_1$  に蓄えられる電荷の大きさはいくらか。

**問 3** コンデンサー  $C_2$  の極板間の電位差はいくらか。

**問 4** 問 3 において、点 P と点 K のうち電位が高いのはどちらか。

この後、スイッチ S を A 側に入れて、十分に時間が経過した後に、スイッチ S を B 側に切り替え、さらに、十分に時間が経過した後に、再びスイッチ S を A 側に切り替える、という操作を繰り返すことにする。

以下において、スイッチ S を  $n$  回目に B 側に入れて、十分に時間が経過した後のコンデンサー  $C_2$  の極板間の電位差を  $V_n$  とする。

**問 5** スイッチ S を  $n+1$  回目に A 側に入れて、十分に時間が経過した後のコンデンサー  $C_1$  の極板間の電位差はいくらか。

**問 6** スイッチ S を  $n+1$  回目に B 側に入れて、十分に時間が経過した後のコンデンサー  $C_2$  の極板間の電位差を  $V_{n+1}$  とするとき、 $V_{n+1}$  を  $V_n$ 、 $E$  を用いて表せ。ただし、点 P と点 K のうち問 4 で答えた方の点を電位が高いものとして関係式を導け。



図 1 ダイオードの記号。

この記号の左側の電位が高いとき電流が左から右に流れる(導線に沿って三角形の頂点が向いた向きに流れる)。逆に、右側の電位が高いときには電流は流れない。

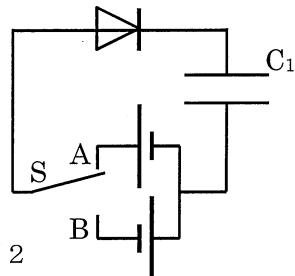


図 2

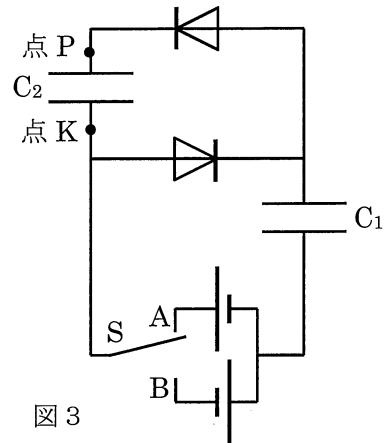


図 3