

2015 年度入学試験問題(前期)

数 学 (問 題)

注 意

- 1) 数学の問題冊子は4ページあり、問題はI, II, III, IVの4題である。
- 2) 別に解答用紙1枚があり、解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。
指定欄以外への記入はすべて無効である。
計算や下書きは問題用紙の白紙・空白部分を利用して行うこと。
- 3) 解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。
解答用紙の※印の欄には何も記入してはならない。
- 4) 問題冊子、解答用紙はともに持ち出してはならない。
- 5) 途中退場または試験終了時には、解答が他の受験生の目に触れないよう、解答用紙の上に問題冊子を重ねて、監督者の許可を得た後に退出すること。

I (1)~(6)の [] の中に、あてはまる数、角度、整式、不等式、記号、語句などを記入せよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。

$$x^3 + y^3 = [\text{ア}] , (2x + y)(x - y) + 2xy - x - y = [\text{イ}]$$

(2) $\frac{1}{3 - \sqrt{5}}$ の整数部分は $x = [\text{ウ}]$ 、小数部分は $y = [\text{エ}]$ であり、
 $x^2 + 4xy + 16y^2 = [\text{オ}]$ である。

(3) a は 1 でない正の定数、 n は自然数とし $x_{n+1} = (x_n)^a$ 、 $x_1 = 2$ で定められる数列 $\{x_n\}$ を考える。第 n 項 x_n を n の式で表すと $[\text{カ}]$ となる。この数列は、 a が条件 $[\text{キ}]$ を満たすとき、任意の n に対して $x_{n+1} < x_n$ を満たし、かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 x_2 \cdots \cdots x_n) = [\text{ク}]$ となる。

(4) x, y に関する連立方程式 $4^{x-y} = 256$ 、 $\log_2(x+y) = 4$ の解は、

$$x = [\text{ケ}] , y = [\text{コ}] \text{ である。}$$

(5) n, k は $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。 x に関する恒等式

$$x^n = a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \cdots + a_1(x-1) + 1 \text{ が成り立つとき, } a_k = [\text{サ}] , a_1 + a_2 + \cdots + a_n = [\text{シ}] \text{ である。}$$

(6) i, n は $1 \leq i \leq n$ を満たす自然数、 k は $-n \leq k \leq n$ を満たす整数とし、1 個の正常なサイコロを n 回投げる操作を考える。第 i 回目に投げたときに出た目が、3 の倍数ならば $X_i = -1$ 、3 の倍数でなければ $X_i = 1$ と定め、

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく。このとき、 X_i の期待値は $[\text{ス}]$ 、
 X の期待値は $[\text{セ}]$ であり、 $X = k$ となる確率は $[\text{ソ}]$ である。

II $0 < a < 2$ とする。点 O を中心とし、半径が 1 の円周上に 3 点 A, B, C があり

$$a \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

を満たしているとする。以下、括弧タ～ツには、 a の式を記入すること。

(1) $\cos \angle AOB = \boxed{\text{タ}}$, $\cos \angle BOC = \boxed{\text{チ}}$ である。

(2) $\triangle ABC$ の面積は $S = \boxed{\text{ツ}}$ である。

(3) 問(2)の S は、 $a = \boxed{\text{テ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ト}}$ をとる。

III $0 < \theta < \pi$ とする。

- (1) $2 \cdot \cos \theta + 3 \cdot \sin \theta = 1$ を満たすのは, $\cos \theta = \boxed{\text{ナ}}$,
 $\sin \theta = \boxed{\text{ニ}}$ である。

- (2) p, q は $p^2 + q^2 \neq 0$ を満たす実数とする。関係式

$$p \cdot \cos \theta + q \cdot \sin \theta = 1 \cdots ①$$

を満たす解 θ が 2 つ存在するための条件を, p, q を用いて表すと $\boxed{\text{ヌ}}$ となる。

以下、括弧ヌの条件が満たされているものとする。

- (3) ①の解を θ_1, θ_2 とする。座標平面において、原点 O, 点 A($\cos \theta_1, \sin \theta_1$), 及び点 B($\cos \theta_2, \sin \theta_2$)を頂点とする $\triangle OAB$ の面積 S を p, q を用いて表すと $\boxed{\text{ネ}}$ となる。そして p, q の値が括弧ヌの条件を満たしながら変化するとき, S が最大値を取るのは、線分 AB の長さが $\boxed{\text{ノ}}$ のときである。

IV n は自然数とし, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, 次の関数を考える。

$$f_k(x) = \sin(kx) - \sqrt{\frac{k}{n}} \cos(kx)$$

(1) 関数 $|f_k(x)|$ の, 正で最小の周期は ハ である。ただし, 記号 $|a|$ は実数 a の絶対値を表す。

(2) 定積分 $I_k = \int_0^{2\pi} |f_k(x)| dx$ の値は ヒ である。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k = \boxed{\text{フ}}$ である。

2015年度前期入学試験問題 数学（問題） 訂正

1ページ

問題I(6)は解答しなくて良い