

[1] 以下の [1] ~ [4] の ① ~ ④ に適切な値を答えなさい。

ただし、 e は自然対数の底とする。

[1] $A = e^2$ とするとき、

$$8\left(1 + \cos^3 \frac{\pi}{18}\right) \log_A e - \frac{3}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{18}\right) \log_e A = \boxed{①} \text{ である。}$$

[2] b を正の定数、 x を正の実数とする。方程式 $\log_e x = bx$ が異なる 2 つの実数解をもつのは $0 < b < \boxed{②}$ のときである。

[3] 数列 $\{c_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を、初項 1、公差 2 の等差数列とする。数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n に対して $T_n = \log_e S_n$, $U_n = e^{T_n}$ と定義する。数列 $\{U_n\}$ の初項から第 24 項までの和の値は $\boxed{③}$ となる。

[4] 定積分 $\int_0^D \frac{2e^x}{2e^x + 3} dx$ の値は $\boxed{④}$ である。ただし、 $D = \log_e 3$ とする。

[2] xy 平面上に 2 点 $P_1(1, 1)$, $P_2(1, 2)$ があり、以下の条件(I), (II), (III)をすべて満たすよう $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$, $P_5(x_5, y_5)$, … を定めるものとする。

$$(I) |\overrightarrow{P_{n-1}P_n}| = \frac{1}{3} |\overrightarrow{P_{n-2}P_{n-1}}| \quad (n=3, 4, 5, \dots)$$

$$(II) \angle P_{n-2}P_{n-1}P_n = \frac{\pi}{4} \quad (n=3, 4, 5, \dots)$$

$$(III) x_n \geq x_{n-1} \quad (n=3, 4, 5, \dots)$$

このとき、以下の問い合わせに答えなさい。

[1] ベクトル $\overrightarrow{P_3P_4}$ を成分で表しなさい。

[2] ベクトル $\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) の成分を k を用いた式で表しなさい。

[3] ベクトル $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) の成分を k を用いた式で表しなさい。

[4] $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Y$ とおく。このとき n を限りなく大きくすると、

点 P_n は点 $P(X, Y)$ に限りなく近づいていく。 X, Y を求めなさい。



3 三角形ABCはAB=AC, $\angle BAC = 2\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ を満たすものとする。

三角形ABCの内接円をO₁とし、その半径をaとする。また、円O_n ($n=1, 2, 3, \dots$)より半径が短く、辺AB, 辺AC, 円O_nに接する円をO_{n+1}とする。このとき、以下の問い合わせに答えなさい。ただし、円周率はπを用いるものとする。

[1] 三角形ABCの周の長さLをaとθを用いて表しなさい。

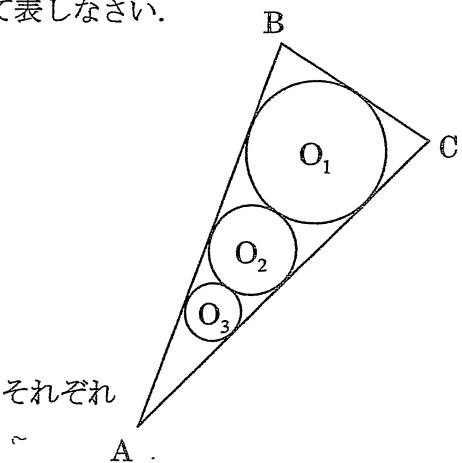
ただし、 $L = AB + BC + CA$ である。

[2] 円O_nの周の長さをW_nで表すとき、

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n$$

をaとθを用いて表しなさい。

[3] $L = W$ が成り立つとき、 $\sin \theta, \cos \theta$ の値をそれぞれ求めなさい。



4 以下の問い合わせに答えなさい。

[1] 次の定積分を求めなさい。ただし、aは正の定数とする。

$$1) \int_0^a t e^{-t} dt \quad 2) \int_0^a t^2 e^{-t} dt$$

[2] 以下の空欄 ① ~ ⑤ に適切な値を答えなさい。

$x \geq 0$ で定義された関数 $f(x) = (\sqrt{x} - 1)e^{-\sqrt{x}}$ に対して、 $y = f(x)$ の表す曲線をCとおく。Cは $x = \boxed{①}$ で極大値 $\boxed{②}$ をとる。C上の点 $(t, f(t))$ での接線が原点を通るのは $t = \boxed{③}$ のときである。このときの接線をlとおくと、lの傾きは $\boxed{④}$ となる。また、C, lとy軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{⑤}$ である。

